Universidad Rey Juan Carlos

GRADO EN MATEMÁTICAS

PROBABILIDAD

TEMA 2

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Sonia Hernández Alonso
Área de Estadística e Investigación Operativa (URJC)

Introducción

- En el tema anterior hemos visto diferentes enfoques para acercarnos al concepto de probabilidad, una definición formal de la misma, y algunas de las propiedades que se derivan de esta definición.
- En este tema analizaremos **cómo calcular probabilidades en situaciones reales**.
- Nos centraremos especialmente en los **espacios muestrales finitos**.

Probabilidades sobre espacios muestrales finitos

- Consideremos un espacio probabilístico, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, con

$$\boxed{\text{card}(\Omega) < \infty}$$

- En estos casos, lo más habitual es tomar como σ-álgebra el conjunto de todos los posibles subconjuntos de Ω, es decir,

$$\boxed{\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)}$$

- Puesto que Ω es finito, cualquier suceso aleatorio $A \in \mathscr{A}$ será también finito, es decir, estará formado por una colección de $r < \infty$ elementos de Ω,

$$A \in \mathscr{A} \Rightarrow A = \{\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, \ldots, \omega_{n_r}\} \quad \text{para algún } r < \infty.$$

- Por tanto la probabilidad de dicho evento A será la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen, esto es,

$$P(A) = P\left(\{\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, \ldots, \omega_{n_r}\}\right) = \sum_{i=1}^{r} P\left(\omega_{n_i}\right).$$

Esquema

- Espacios equiprobables. Regla de Laplace.
- Probabilidad condicionada.
- Regla de la multiplicación.
- Independencia de sucesos.
- Teorema de la probabilidad total.
- Teorema de Bayes.
- Probabilidad de la unión de m sucesos.
- Problemas de repaso de cálculo de probabilidades.

Espacios equiprobables

Regla de Laplace

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

¿Qué es un espacio equiprobable?

- En muchas ocasiones, por razones de simetría física o lógica, todos los resultados posibles de un experimento tienen las mismas posibilidades de ocurrir.
- Por ejemplo en el sorteo de la ONCE todos los numeros tienen la misma probabilidad de obtener el premio; o al lanzar un dado equilibrado, todos los valores de 1 a 6 tienen la misma posibilidad de aparecer.
- Se dice por ello que estos espacios muestrales son **equiprobables**.

Defininición: ¿Qué es un espacio equiprobable?

- **Definición**: Dado un espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ con

$$\text{card}(\Omega) < \infty,$$

diremos que se trata de un **espacio equiprobable** si para todo suceso elemental $\omega \in \Omega$ se verifica

$$\boxed{P(\omega) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}}$$

Regla de Laplace

- En los espacios equiprobables puede calcularse la probabilidad de un suceso aleatorio como el cociente entre el número de casos favorables al mismo y el número total de casos posibles.

- Sea $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ **un espacio equiprobable**.

  Entonces la probabilidad de cualquier suceso $A \subset \Omega$ viene dada por

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{cardinal}(\Omega)},}$$

  o, expresado de otro modo, por

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}.}$$

Ejemplo: aplicación de la regla de Laplace

- **Ejercicio 1:** Se tiran dos dados, uno blanco y otro negro y se quiere calcular probabilidades relativas a este experimento.

  Como el espacio muestral,

  $$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(2,6),\ldots\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\},$$

  es equiprobable, podemos calcular la probabilidad de cualquier suceso utilizando la regla de Laplace.

  Calcular las siguientes probabilidades:

  - P(sacar mas puntuación en dado blanco que en negro)
  - P(la suma de las puntuaciones es 2, 3 ó 12)
  - P(la mayor puntuación de los dos dados es 5)

resolución:.....pizarra

¿Cómo contar los casos?

- Muchas veces el recuento de los casos posibles y los favorables es más complicado que en los ejemplos anteriores.

- Supongamos, por ejemplo, que en lugar de lanzar dos dados lanzamos cinco dados, y queremos calcular la probabilidad de que la suma de las puntuaciones esté entre 10 y 20.

  Esta probabilidad puede calcularse usando la regla de Laplace, pero contar los casos directamente resulta muy complejo.

- En estas ocasiones conviene hacer uso de la **combinatoria** para contar el número de casos posibles y el de los casos favorables.

Otro ejemplo de aplicación de la regla de Laplace

- **Ejercicio 2:** En una residencia de estudiantes se alojan 12 alumnas. Conocedoras de la contaminación que genera el abuso del coche, 8 de ellas autilizan el transporte público para ir a la Universidad. Las otras 4, sin embargo, recurren diariamente a sus coches para asistir a clase.

  Un sociólogo está analizando si las estudiantes actuales tienen hábitos con menor impacto ecológico. Por ello acude a la residencia para encuestar a algunas estudiantes. Una vez allí decide entrevistar a las 3 primeras a las que encuentre.

  a) Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de las estudiantes entrevistadas utilicen diariamente el transporte público.

     Solución: 0.5091

  b) ¿Cúal es la probabilidad de que alguna de las estudiantes encuestadas acuda a la universidad en coche?

     Solución: 0.7455

resolución:.....pizarra

Otro ejemplo de aplicación de la regla de Laplace

- **Ejercicio 3:** Un edificio consta de 9 pisos y planta baja. Siete personas cogen el ascensor en el bajo. Suponiendo que para cada una de estas siete personas, la probabilidad de bajar del ascensor en cualquiera de los 9 pisos es la misma, calcular:

  1. La probabilidad de que todas dejen el ascensor en el mismo piso.

     Solución: 1.88×10^{-6}

  2. La probabilidad de que las siete se bajen del ascensor en pisos diferentes.

     Solución: 0.03793

resolución:.....pizarra

Otro ejemplo de aplicación de la regla de Laplace

- **Ejercicio 4:** Se introducen al azar (y con posibilidad de reemplazamiento) 5 bolas en 8 urnas.

  1. ¿Cual es la probabilidad de que las 5 bolas de introduzan en la misma urna?

     Solución: 0.0002

  2. ¿Cual es la probabilidad de que al menos una urna tenga dos bolas o más?

     Solución: 0.7949

Otro ejemplo: coincidencia de cumpleaños

- **Ejercicio 5:** ¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 30 personas haya alguna coincidencia de cumpleaños

  Suponer que, para cada persona, es igual de probable haber nacido en cualquiera de los 365 días del año.

resolución:.....pizarra

Solución: coincidencia de cumpleaños

$P(\text{alguna coincidencia})$

$$= 1 - P(\text{ninguna coincidencia})$$

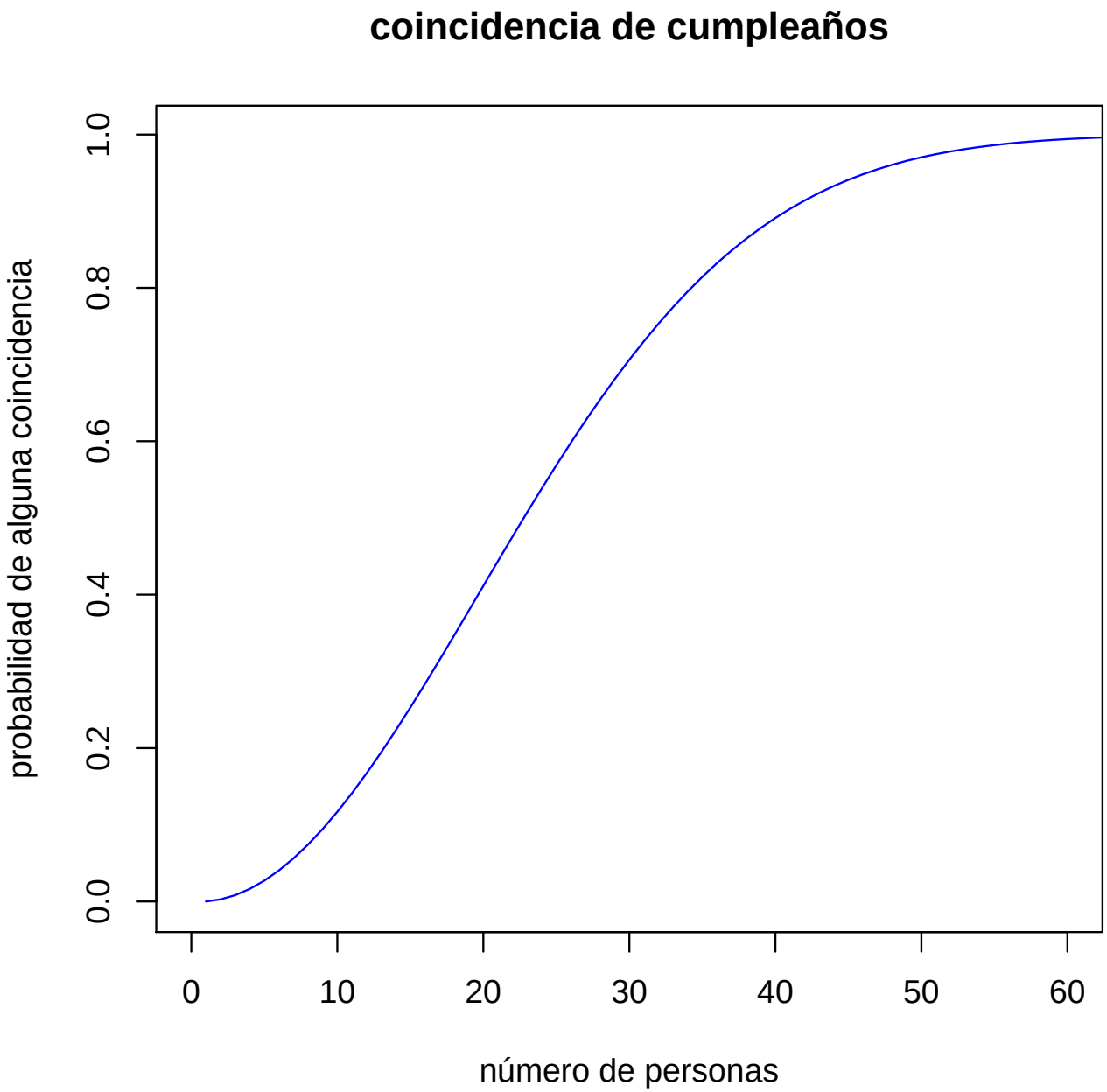
$$= 1 - \frac{\text{n}^o \text{ combinaciones de fechas para 30 cumples sin coincidencias}}{\text{n}^o \text{ combinaciones de fechas para 30 cumples}}$$

$$= 1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times 336}{365^{30}}$$

$$= \boxed{\mathbf{0.7063}}$$

- Así pues, con 30 personas, la probabilidad de que haya alguna coincidencia en los cumpleaños es del 70.63 %.
- El gráfico de la página siguiente representa la probabilidad de que haya alguna coincidencia en función del número de personas del grupo.

Gráfico: coincidencia de cumpleaños



Limitaciones de la regla de Laplace

- Obsérvese que **la regla de Laplace no puede aplicarse para calcular probabilidades en cualquier experimento aleatorio**, ya que^{o} muchas veces los espacios muestrales no son equiprobables.

- Por ejemplo el espacio muestral del experimento consistente en lanzar simultáneamente dos monedas iguales,

$$\Omega = \{\text{dos caras, una cara y una cruz, dos cruces}\},$$

  consta de tres elementos.

- Sin embargo estos tres sucesos elementales no son igualmente probables, ya que

$$P(\text{dos caras}) = P(\text{dos cruces}) = \frac{1}{4},$$

  mientras que

$$P(\text{una cara y una cruz}) = \frac{1}{2}.$$

Probabilidad condicionada

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Actualizando la información disponible

- En muchas ocasiones, cuando se está calculando la probabilidad de un suceso, aparece nueva información que **cambia o actualiza** las posibilidades de que ocurra dicho evento.

- Supongamos por ejemplo que se lanza un dado equilibrado y se puede apostar a **pares o nones**. Nuestra intención inicial es **apostar por los números impares**. Usando la regla de Laplace tenemos que

$$P(\text{impar}) = \frac{3}{6} = 0.5 = P(\text{par}),$$

  por lo que la apuesta que tenemos en mente es razonable.

- Supongamos que **alguien nos dice que el resultado del lanzamiento ha sido un número mayor que dos**. ¿Preferiríamos cambiar nuestra apuesta antes de ver el resultado?

- ¿Y si **se nos informa de que el resultado obtenido ha sido un número mayor que tres**?

Definición de probabilidad condicionada

- El conocimiento de que ha ocurrido cierto suceso B puede **modificar la probabilidad de que se verifique otro suceso** A, ya que por lo general, la ocurrencia de B cambiará el número de casos posibles del experimento, y también el número de casos favorables al suceso A.

- La idea de **probabilidad condicionada permite incorporar esta información**, relevante para el cálculo de la probabilidad de un suceso.

Definición de probabilidad condicionada

- **Definición**: Dado un espacio probabístico $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, y dos sucesos $A, B \in \mathscr{A}$, con $P(B) > 0$, se define la **probabilidad condicionada del suceso A sabiendo que ha ocurrido B** como

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

- **Observación:** Esta definición **sólo tiene sentido si** $P(B) > 0$.

Probabilidad condicionada: ejemplo

- **Ejercicio 6:** Para el lanzamiento un dado equilibrado, calcular:

  a) $P(\text{lanzamiento impar} \,|\, \text{lanzamiento} \geq 2)$,

  b) $P(\text{lanzamiento impar} \,|\, \text{lanzamiento} \geq 3)$.

  c) $P(\text{lanzamiento múltipo de } 3 \,|\, \text{lanzamiento par})$.

  d) $P(\text{lanzamiento par} \,|\, \text{lanzamiento múltiplo de } 3)$.

resolución:.....pizarra

Probabilidad condicionada: ejemplo

- **Ejercicio 7:** Se han extraido al azar, y sin reemplazamiento, 3 cartas de una baraja española (que consta de 40 naipes divididos en 4 palos).

  Una persona que estaba presente en esta extracción ha corroborado que alguno de los naipes seleccionados es del palo de espadas.

  ¿Cual es la probabilidad de que el número de espadas seleccionadas sea menor que 3?

  resolución:.....pizarra

Regla de la multiplicación

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Regla de la multiplicación

- Consideremos dos sucesos $A, B \subset \Omega$ con $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$.
- La definición de probabilidad condicionada implica que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B)$$

y también que

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A).$$

Por tanto,

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = P(B)\, P(A|B)}$$

- Es decir, la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez puede calcularse como la probabilidad de que ocurra uno cualquiera de ellos multiplicada por la probabilidad de que ocurra el otro suceso sabiendo que ha ocurrido el primero.
- Nos referiremos a este resultado como **regla de la multiplicación**.

Ejemplo: mujer y desempleada

- **Ejercicio 8:** En cierto país, el 40 % la población está formada por mujeres. Se sabe que el 15 % de los hombres y el 28 % de las mujeres está en paro.

  Un estudio requiere contactar con una **mujer que esté desempleada**.

  Si se selecciona al azar a cualquier persona dentro de la población, ¿cuál es la probabilidad de que dicha persona cumpla los requisitos del estudio?

Solución: mujer y desempleada

- Consideremos los sucesos
  - D= "la persona seleccionada está desempleada"
  - M= "la persona seleccionada es una mujer"

Queremos calcular $P(M \cap D)$, o lo que es lo mismo, $P(M \text{ y } D)$.

El enunciado nos indica que

$$\begin{aligned} P(M) &= 0.4 \\ P(D|M) &= 0.28 \end{aligned}$$

Aplicando la regla de la multiplicación se obtiene que la probabilidad de que la persona seleccionada sea una mujer desempleada es

$$P(M \cap D) = P(M)P(D|M) = 0.4 \times 0.28 = \mathbf{0.112}$$

Extensión de la regla de la multiplicación

- La regla de la multiplicación **se puede extender a tres o más sucesos** de Ω:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B|A)\, P(C|A,B),$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A)\, P(B|A)\, P(C|A,B)\, P(D|A,B,C),$$

  etc.

- Esto facilita el cálculo de probabilidades de eventos en experimentos que van sucediendo secuencialmente, como es el caso de los ejemplos que siguen.

Ejemplo: extracción de tres cartas de la baraja

- **Ejercicio 9:** La baraja española consta de 40 cartas divididas en 4 palos. Se van a seleccionar al azar tres cartas de una baraja de este tipo. Las cartas se eligirán sin reemplazamiento, es decir, cuando se saca una carta se queda fuera de la baraja.

  1. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres cartas sean copas?
  2. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos primeras cartas sean ases y la tercera sea un rey?
  3. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan dos ases y un rey en cualquier orden?
  4. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún caballo?
  5. ¿Cuál es la probabilidad de obtener alguna espada?
  6. ¿Cuál es la probabilidad de que obtener una sota, un caballo y un rey en cualquier orden?

  resolución:.....pizarra

Ejemplo: probabilidad de aprobar una oposición

- **Ejercicio 10:** El temario de un examen de oposición consta de 80 temas que están numerados.
- En el examen, cada opositor saca cuatro bolas de una bolsa que contiene 80 bolas numeradas con cada uno de los temas.
- El opositor elige el tema que desee (uno sólo) de entre esos cuatro y lo expone ante el tribunal.
- Una opositora acude al examen habiendo estudiado sólo 20 de estos temas. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe la oposición?